ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 14 OCTOBRE 1907,

PRÉSIDENCE DE M. A. CHAUVEAU.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

ASTRONOMIE. — *Sur les passages de Mercure devant le Soleil, et en particulier sur celui du 14 novembre prochain.* Note de M. G. Bigourdan.

Les passages de Mercure devant le Soleil, moins rares que ceux de Vénus, sont cependant peu fréquents et ils présentent une véritable importance [1], tant au point de vue de la théorie de Mercure qu'à celui de la constitution physique de cette planète.

Le 14 novembre prochain aura lieu un de ces passages et il sera entièrement observable en France dans les meilleures conditions; aussi a-t-il paru utile de rappeler notamment les apparences complexes qui ont accompagné les passages précédents.

Si l'orbite de Mercure était couchée dans l'écliptique, la planète passerait, pour nous, devant le Soleil à chacune de ses révolutions synodiques. Mais l'inclinaison de cette orbite est au contraire assez forte (7°0′) et, pour qu'un passage ait lieu, il faut évidemment que les deux conditions suivantes soient remplies à la fois : 1° que Mercure soit au voisinage de l'un de ses nœuds; 2° que la Terre se trouve du même côté que Mercure par rapport au Soleil et dans le voisinage de la ligne de ces mêmes nœuds.

La longitude du nœud ascendant de l'orbite de Mercure est de 46°33′; et le Soleil passe par cette longitude du 5 au 6 mai. Les passages de Mer-

---

[1] Ces passages ont donné lieu à de nombreuses publications dont la bibliographie a été faite par M. E.-S. Holden : *Index-Catalogue of books and memoirs on the transits of Mercury*, Cambridge (Mass.), 1878, in-8°.

cure devant le Soleil se produiront donc (1) dans la première moitié de mai (nœud descendant) ou dans la première moitié de novembre (nœud ascendant).

La théorie de Mercure a longtemps présenté aux astronomes d'énormes difficultés dont on peut lire l'intéressant exposé en tête de la théorie de cette planète par Le Verrier. Aussi la prédiction de ses passages devant le Soleil comportait autrefois des incertitudes énormes : en 1661 les diverses Tables variaient de 5 jours sur le moment du phénomène, et Hévélius dut en surveiller l'arrivée dès le premier mai; elle n'eut lieu réellement que le 3. Encore en 1786, presque tous les astronomes de Paris manquèrent l'observation du passage parce qu'il se produisit près de 1 heure après le moment calculé.

La discussion des passages de Mercure (2) a conduit Le Verrier à une de ses plus belles découvertes, celle de l'accélération séculaire du périhélie de cette planète; et cela suffit pour montrer toute l'importance de ces obser-

---

(1) *Passages de Mercure sur le Soleil, depuis l'an* 1600 *jusqu'à l'an* 2000 [pour le passé, on a marqué d'un astérisque (*) ceux qui n'ont pas été observés. Les passages du nœud ascendant ou de novembre sont indiqués par le signe N, et ceux de mai par le signe M, suivis l'un et l'autre du jour du mois] :

1605* N 1	1677 N 7	1753 M 6	1815* N 12	1881 N 8	1927 N 8
1615* M 3	1690 N 10	1756 N 6	1822 N 5	1891 M 9	1937 M 10
1618* N 4	1697 N 3	1769 N 9	1832 M 5	1894 N 10	1940 N 12
1628* M 5	1707 M 6	1776* N 2	1835 N 7		1953 N 13
1631 N 7	1710* N 6	1782 N 12	1845 M 8		1960 N 6
1644* N 8	1723 N 9	1786 M 4	1848 N 9		1970 M 9
1651 N 2	1736 N 11	1789 N 5	1861 N 12	1907 N 12	1973 N 9
1661 M 3	1740 M 2	1799 M 7	1868 N 5	1914 N 6	1986 N 12
1664* N 4	1743 N 5	1802 N 9	1878 M 6	1924 M 7	1999 N 24

(2) J.-N. de L'Isle (*Avertissement aux astronomes sur le passage de Mercure au-devant du Soleil, qui doit arriver le* 6 *may* 1743, Paris, 1743, in-4° de 30 pages) donne, pour la période 1631-1743, le *Catalogue de tous les lieux de la Terre où l'on a vu Mercure sur le Soleil, avec les noms des astronomes qui l'y ont observé.*

Le Verrier (*Annales de l'Observatoire de Paris, Mémoires,* t. V, 1859) discute tous les passages jusqu'à 1848 inclus.

MM. Wolf et André donnent les résultats des observations du passage de 1868 (*Annales de l'Observatoire de Paris, Mémoires,* t. X, 1874, p. 2-3).

M. L. Niesten [*Annuaire de l'Obs. royal de Bruxelles,* 1881, 48e année (1880), p. 159-193] résume toutes les observations du passage de 1878 et rappelle beaucoup des apparences physiques observées jusque-là.

vations au point de vue de la théorie de Mercure. En outre, la planète se présente alors sous son plus grand diamètre, de sorte qu'elle se trouve dans des conditions spécialement favorables pour la détermination de ses dimensions et surtout de sa figure (¹).

Au point de vue physique, ces passages ne présentent pas moins d'intérêt, car Mercure est alors accompagné d'apparences variées encore mal expliquées, telles qu'auréoles, points brillants, etc. Et si quelque satellite circule autour de la planète, c'est alors qu'on pourrait l'apercevoir le plus aisément.

En vue de faciliter la tâche des observateurs et d'éclaircir les causes de ces apparences nous allons passer en revue les observations auxquelles se prêtent ces passages, et les phénomènes qui les ont accompagnés jusqu'ici.

Dans cette énumération nous suivrons autant que possible l'ordre chronologique, celui dans lequel se présentent les phénomènes, du commencement du passage au milieu, car du milieu à la fin la plupart des phénomènes se reproduisent dans l'ordre inverse.

Visibilité de Mercure en dehors du Soleil au moyen du spectroscope. — Comme pour la Lune et pour Vénus, le spectroscope permet de voir Mercure en dehors du Soleil, au moment où il se projette sur la couronne ou sur les protubérances; mais les observations de ce genre sont encore rares; l'une d'elles a été faite par M. Janssen en 1878.

Dans le passage du 14 novembre prochain, Mercure sera toujours au voisinage du pôle Nord du Soleil, c'est-à-dire dans une région où il y a peu ou point de protubérances : cette circonstance pourrait être défavorable pour la visibilité de Mercure au spectroscope avant son entrée sur le Soleil.

Visibilité oculaire de Mercure en dehors du Soleil. — En 1878, Langley put voir Mercure tout entier en dehors du Soleil avant le premier contact. Le même phénomène avait déjà été observé pour Vénus par Le Monnier en 1761; en 1874 M. Bouquet de la Grye l'aperçut aussi, et en 1882 on commença de voir cette planète longtemps avant le premier contact; ce n'était d'abord qu'un trait fort brillant de 15″ de long placé sur le bord de la planète opposé au Soleil; il s'allongea graduellement, en se courbant finalement il forma l'auréole, ce qui est une preuve directe de l'existence de l'atmosphère de Vénus; aussi serait-il intéressant de faire la même constatation pour Mercure.

(¹) Les anciens astronomes employaient aussi les passages de Mercure pour déterminer la parallaxe solaire, les longitudes, etc. : ces usages sont aujourd'hui secondaires.

Contacts extérieurs (1er et 4e). — Ces contacts sont assez incertains, et il en est surtout ainsi pour celui de l'entrée, parce qu'en général rien ne l'annonce à l'avance.

Leur observation est cependant importante ; ainsi, par la combinaison de chacun d'eux avec le contact intérieur correspondant, on peut calculer le diamètre de Mercure, etc.

Aspect des cornes; mesure de leur distance. — Immédiatement avant le deuxième contact et immédiatement après le troisième, Mercure découpe sur le Soleil des cornes aiguës dont l'examen est intéressant ; si en effet Mercure a une atmosphère, ces cornes pourront être déformées par des réfractions irrégulières. Si l'on disposait d'assez de temps, la mesure de la distance de ces cornes, ou même une estimation soignée faite à un moment convenable, permettrait de calculer d'une manière indépendante les heures des contacts.

Contacts intérieurs (2e et 3e). — L'observation de ces contacts est souvent compliquée par des phénomènes variables d'aspect, bien connus sous les noms de *goutte noire, ligament, pont*, etc., et dont il serait beaucoup trop long de mentionner ici les diverses descriptions. Les heures notées pour ces contacts dépendent, en partie, des verres noirs employés, comme il résulte d'une observation connue de De Barros, astronome portugais qui observa le passage de Mercure de 1753 avec De L'Isle, à l'hôtel de Cluny, au moyen d'un réflecteur grégorien de 4 pieds de long [1] : il nota d'abord le troisième contact à travers un verre vert placé en avant de son verre enfumé ; enlevant aussitôt le verre vert, il vit encore un léger filet de lumière entre les deux bords et put ainsi noter un autre troisième contact qui arriva 4 secondes après le premier. Et de même au quatrième contact : il l'observa d'abord avec les deux verres, puis, 6 ou 7 secondes plus tard, avec le seul verre fumé.

Ces apparences de pont, etc., ont été longtemps attribuées à un phénomène purement subjectif, l'irradiation. MM. Wolf et André, qui les ont étudiées expérimentalement [2], les attribuent aux défauts des objectifs ; avec des « instruments d'assez grande ouverture, non affectés d'aberration » les contacts doivent se produire géométriquement sans amener aucun phénomène particulier.

Dans la suite, MM. André et Angot ont continué l'étude expérimentale

---

(1) *Phil. Trans.*, vol. XLVIII, 1753, p. 361.

(2) *Annales de l'Observatoire de Paris, Mémoires*, t. X, 1872, p. B. 1-37.

de ces phénomènes [1], que l'on peut éviter, disent-ils, soit par l'emploi seul d'un verre noir gradué placé à l'oculaire, soit par l'emploi simultané de ce même verre gradué combiné avec un écran en réseau placé devant l'objectif. La manière d'employer le verre noir est d'ailleurs la même dans l'un et l'autre cas et peut se résumer ainsi :

Contact interne d'entrée (2e contact). Laisser d'abord au Soleil l'éclat maximum que l'œil peut supporter; quand le ligament paraît, diminuer cet éclat en employant une partie plus foncée du verre noir, ce qui fera disparaître le ligament; si ce ligament se reforme de nouveau on le fera disparaître de même jusqu'au moment où se rompra le filet obscur qui réunit les bords du Soleil et de Mercure.

Contact interne de sortie (3e contact). Dès que le ligament apparaît, pousser le verre noir vers les parties absorbantes, de manière à réduire le ligament à un simple filet obscur, et manœuvrer ce verre noir de manière à réduire constamment le ligament à l'état naissant, mais en ne diminuant l'éclat que dans la limite strictement nécessaire.

Dans une prochaine Note nous parlerons de quelques autres apparences qui n'ont pas encore reçu d'explication définitive.

M. **Alfred Giard**, en présentant à l'Académie un Volume intitulé : J.-B. Lamarck, *Discours d'ouverture* (an VIII, an X, an XI, 1806), s'exprime ainsi :

Ce recueil constitue une réédition textuelle des Leçons d'ouverture des cours professés par Lamarck au Muséum d'Histoire naturelle lorsque à l'apogée de sa carrière l'illustre naturaliste développa publiquement les idées générales résultant de ses longues recherches de Botanique et de Zoologie systématiques. Le discours du 21 floréal an VIII contient le premier exposé de la théorie transformiste. Les discours de l'an XI et de 1806 sont en quelque sorte le programme et la première ébauche de la *Philosophie zoologique* qui parut en 1809. Ils étaient devenus introuvables et la plupart des auteurs qui en ont parlé ne les ont connus que de seconde main par des citations antérieures.

---

[1] C. André, *Étude de la diffraction dans les instruments d'optique*. — C. André et A. Angot, *Origine du ligament noir dans les passages de Vénus et de Mercure et moyen de l'éviter* (*Annales de l'École normale*, 2e série, t. V, 1876, p. 275... et t. X, 1881, p. 323.... Un extrait du dernier Mémoire est dans *Astr. Nachr.*, t. CI, p. 33).

Qu'il me soit permis d'attirer une fois de plus l'attention de l'Académie sur l'utilité qu'il y aurait de publier une édition nationale complète des œuvres de J.-B. Lamarck, dont quelques-unes, et des plus importantes, sont aujourd'hui de véritables raretés bibliographiques.

Pourquoi la France ne ferait-elle pas pour notre grand naturaliste ce qu'elle a fait pour les grands mathématiciens, physiciens et chimistes dont elle est justement fière?

CORRESPONDANCE.

M. le **Secrétaire perpétuel** signale, parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

1° *La Carte hypsométrique du Portugal* et une *Notice sur la Carte hypsométrique du Portugal* (avec une Carte tectonique), par M. Paul Choffat. (Hommage du Service géologique du Portugal.)

2° *Les enfants anormaux*, par Alfred Binet et Dr Th. Simon, avec une Préface de Léon Bourgeois, Sénateur. (Présenté par M. Gaston Bonnier.)

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur la sommabilité des séries de Laurent.* Note de M. A. Buhl.

Dans une Note publiée ici même (2 avril 1907) et dans le *Bulletin* de M. Darboux (juin 1907), j'ai indiqué des généralisations considérables des formules servant de base à la théorie des séries sommables de M. Borel. Voici de nouveaux résultats dans le même ordre d'idées.

Soit C une couronne de Laurent formée de cercles concentriques C′ et C″ de rayons $r' > r''$. Soit $F(x)$ une fonction uniforme holomorphe dans la couronne en question. On aura, dans C′,

$$(1)\quad F(x)=\frac{1}{2i\pi}\int_{C'}F(z)\left(\frac{1}{z}+\frac{x}{z^2}+\ldots\right)dz+\frac{1}{2i\pi}\int_{C''}F(z)\left(\frac{1}{x}+\frac{z}{x^2}+\ldots\right)dz.$$

Soient

$$s'_n=\frac{1}{2i\pi}\int_{C'}F(z)\left(\frac{1}{z}+\ldots+\frac{x^n}{z^{n+1}}\right)dz=\frac{1}{2i\pi}\int_{C'}F(z)\frac{z^{n+1}-x^{n+1}}{z-x}\frac{dz}{z^{n+1}},$$

$$s''_n=\frac{1}{2i\pi}\int_{C''}F(z)\left(\frac{1}{x}+\ldots+\frac{z^n}{x^{n+1}}\right)dz=\frac{1}{2i\pi}\int_{C''}F(z)\frac{x^{n+1}-z^{n+1}}{x-z}\frac{dz}{x^{n+1}}.$$

Considérons maintenant une autre couronne Γ formée de cercles Γ' et Γ'' de rayons $\rho' > \rho''$. Soit $f(\xi)$ une autre fonction uniforme holomorphe dans Γ. J'aurai pour $f(\xi)$ une formule identique à (1) aux notations près et je poserai

$$c'_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma'} f(\zeta)\frac{\xi^n}{\zeta^{n+1}}d\zeta, \qquad c''_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma''} f(\zeta)\frac{\zeta^{n+1}}{\xi^{n+2}}d\zeta.$$

Or (*loc. cit.*), avec les hypothèses $|\xi| < \rho'$, $|\xi x| < r'\rho'$, on a

$$(2) \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} c'_n s'_n = \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^2 \int_{C'}\int_{\Gamma'} \frac{F(z)f(\zeta)\,dz\,d\zeta}{(\zeta-\xi)\left(z-\dfrac{\xi x}{\zeta}\right)}.$$

Avec les hypothèses $|\xi| > \rho''$, $|\xi x| > r''\rho''$ et par un calcul analogue on a

$$(3) \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} c''_n s''_n = \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^2 \int_{C''}\int_{\Gamma''} \frac{F(z)f(\zeta)\,dz\,d\zeta}{(\zeta-\xi)\left(z-\dfrac{\xi x}{\zeta}\right)}.$$

Supposons pour simplifier que $F(x)$ n'ait, à l'intérieur de C'', que des pôles simples a'_k avec des résidus A'_k. En vertu des hypothèses précédentes, $\xi x : \zeta$ est toujours *dans* C' s'il s'agit de (2), toujours *hors de* C'' s'il s'agit de (3). On a alors

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} c'_n s'_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma'} F\left(\frac{\xi x}{\zeta}\right)\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-\xi} + \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma'}\sum_k \frac{A'_k f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-\xi)\left(a'_k-\dfrac{\xi x}{\zeta}\right)},$$

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} c''_n s''_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma''}\sum_k \frac{A'_k f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-\xi)\left(a'_k-\dfrac{\xi x}{\zeta}\right)}.$$

Donc

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} c'_n s'_n - \sum_{n=0}^{n=\infty} c''_n s''_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma'} F\left(\frac{\xi x}{\zeta}\right)\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-\xi} + \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma}\sum_k \frac{A'_k f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-\xi)\left(a'_k-\dfrac{\xi x}{\zeta}\right)},$$

formule dans laquelle il faut bien remarquer que la première intégration est relative à la simple circonférence Γ' *tandis que la seconde est relative au double contour de la couronne* Γ.

Intégrons par rapport à ζ. L'intégrale relative à Γ' est égale à

$$F(x)f(\xi) - \sum_k f\left(\frac{\xi x}{a_k}\right)\frac{x A_k}{a_k(x-a_k)} - \sum_h F\left(\frac{\xi x}{b'_k}\right)\frac{B'_h}{\xi-b'_h},$$

résultat qu'on obtient en supposant à $F(x)$ hors de C' des pôles simples a_k de résidus A_k. Dans ces conditions $F\left(\frac{\xi x}{\zeta}\right)$ possède des pôles $\zeta_k = \frac{\xi x}{a_k}$ toujours dans Γ'. De plus $f(\zeta)$ possède dans Γ'' et, par suite, dans Γ' des pôles simples b'_h de résidus B'_h.

Quant à l'intégrale relative à la couronne Γ, elle est égale à

$$-\sum_k \frac{A'_k f(\xi)}{x - a'_k} + \sum_k{}' f\left(\frac{\xi x}{a'_k}\right) \frac{x A'_k}{a'_k(x - a'_k)},$$

le sigma marqué d'un accent n'existant que si $\xi x : a'_k$ est dans la couronne Γ. On a finalement une formule qui peut s'écrire

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c'_n s'_n}{f(\xi)} - \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c''_n s''_n}{f(\xi)} = F(x) - \sum \frac{A'_k}{x - a'_k} - \sum \frac{F\left(\frac{\xi x}{b'_h}\right)}{f(\xi)} \frac{B'_h}{\xi - b'_h}$$
$$- \sum \frac{f\left(\frac{\xi x}{a_k}\right)}{f(\xi)} \frac{x A_k}{a_k(x - a_k)} + \sum{}' \frac{f\left(\frac{\xi x}{a'_k}\right)}{f(\xi)} \frac{x A'_k}{a'_k(x - a'_k)}.$$

Faisons croître ρ' jusqu'à ce que Γ' passe par le point b_k le plus voisin, soit β. Imaginons de plus que ξ tende vers β sans sortir de la couronne Γ. Alors les trois derniers sigmas du second membre de la formule précédente sont manifestement nuls. Je dis que le second sigma du premier membre est nul aussi. Les c''_n en effet ne cessent pas de former une série convergente et il en est de même des $c''_n s''_n$, car les s''_n sont finis pour x dans C. Donc

$$\lim_{\xi=\beta} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c'_n s''_n}{f(\xi)} = F(x) - \sum \frac{A'_k}{x - a'_k}.$$

Reprenons la formule générale et faisons décroître ρ'' jusqu'à ce que Γ'' passe par le point b'_h le plus voisin, soit β', et imaginons que ξ tende vers β'. Cette fois c'est le premier sigma du premier membre qui est nul. Le troisième et le quatrième du second membre sont nuls; le second se réduit à $F(x)$, car $(\xi - b'_h) f(\xi)$ pour ξ tendant vers $b'_h = \beta'$ est précisément le résidu B'_h. Donc

$$\lim_{\xi=\beta'} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c''_n s''_n}{f(\xi)} = \sum \frac{A'_k}{x - a'_k}.$$

Finalement

$$F(x) = \lim_{\xi=\beta} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c'_n s'_n}{f(\xi)} + \lim_{\xi=\beta'} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c''_n s''_n}{f(\xi)}.$$

Cette formule équivaut au développement laurentien (1). Elle généralise de façon considérable le théorème de sommabilité de Cesàro. Je compte l'étudier prochainement plus en détail.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les invariants des systèmes différentiels.* Note de M. **Étienne Delassus**, présentée par M. Émile Picard.

J'ai démontré en 1896 qu'un système différentiel compatible à p inconnues et m variables pouvait toujours, grâce à un changement de variables linéaire et indéterminé, se mettre sous une forme canonique caractérisée par un Tableau

$$\text{(A)} \qquad \left\{ \begin{array}{llll} \alpha_0^1, & \alpha_1^1, & \ldots, & \alpha_{m-1}^1, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ \alpha_0^p, & \alpha_1^p, & \ldots, & \alpha_{m-1}^p \end{array} \right.$$

de nombres fondamentaux. Ce Tableau (A) indique les fonctions initiales, relatives aux diverses inconnues, qui déterminent les intégrales en vertu du théorème d'existence déduit de la forme canonique considérée.

On constate aisément, sur des exemples simples, qu'un même système différentiel peut être mis sous des formes canoniques diverses qui fournissent des Tableaux (A) ou, ce qui revient au même, des systèmes de fonctions initiales absolument distincts. Quelles sont les relations qui existent entre ces divers systèmes initiaux relatifs à un même système différentiel?

Si l'on pose

$$\begin{aligned} \sigma_0^i &= \alpha_0^i, \\ \sigma_1^i &= \alpha_0^i + \alpha_1^i, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \sigma_{m-1}^i &= \alpha_0^i + \alpha_1^i + \ldots + \alpha_{m-1}^i \end{aligned}$$

et

$$\varphi_q(z) = (-1)^q \frac{z(z-1)\ldots(z-q)}{1.2\ldots(q+1)} \qquad (q \text{ entier nul ou positif}),$$

on démontre que les m quantités

$$\begin{aligned} I_0 &= \sum_1^p \varphi_0(\sigma_0^i), \\ I_1 &= \sum_1^p \varphi_0(\sigma_1^i) + \sum_1^p \varphi_1(\sigma_0^i), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ I_{m-1} &= \sum_1^p \varphi_0(\sigma_{m-1}^i) + \sum_1^p \varphi_1(\sigma_{m-2}^i) + \ldots + \sum_1^p \varphi_{m-2}(\sigma_1^i) + \sum_1^p \varphi_{m-1}(\sigma_0^i) \end{aligned}$$

conservent la même valeur pour toutes les formes canoniques d'un même système et, par conséquent, sont des *invariants*.

Les *équations d'invariance* ainsi obtenues donnent la réponse complète à la question posée. Mais on peut aller beaucoup plus loin.

Si l'on introduit des nombres fondamentaux fictifs $\alpha_m^1, \alpha_m^2, \ldots, \alpha_m^p$ qui sont seulement assujettis à avoir une somme égale au nombre des constantes arbitraires qui, en plus des fonctions arbitraires, entrent dans l'intégrale par application du théorème de Cauchy généralisé, on peut démontrer l'existence d'un $(m+1)^{\text{ième}}$ invariant de même forme

$$I_m = \sum_1^p \varphi_0(\sigma_m^i) + \sum_1^p \varphi_1(\sigma_{m-1}^i) + \ldots + \sum_1^p \varphi_{m-1}(\sigma_1^i) + \sum_1^p \varphi_m(\sigma_0^i).$$

Les $m+1$ équations d'invariance font non seulement connaître les systèmes initiaux relatifs aux formes canoniques obtenues grâce au changement de variables, mais elles en font connaître aussi d'autres.

On montre que les I sont encore invariants pour une transformation ponctuelle quelconque du système et qu'une telle transformation linéaire indéterminée permet d'atteindre toutes les formes canoniques qui correspondent aux diverses solutions des équations d'invariance.

Ces équations d'invariance reçoivent ainsi leur signification complète et l'un des résultats qu'on en déduit immédiatement est que *le nombre des formes canoniques distinctes d'un même système différentiel est toujours limité.*

Les invariants I permettent d'établir des formules intéressantes et de démontrer rigoureusement certaines propriétés. Ils jouent un rôle important dans la transformation des systèmes différentiels. Je me bornerai ici à citer les propriétés suivantes :

1° Supposons un système différentiel S *ordonné*, c'est-à-dire décomposé en groupes S_n dont toutes les équations sont d'ordre n, distinctes par rapport aux dérivées d'ordre n et telles que toute dérivée d'une équation S_{n-1} soit une conséquence algébrique des équations $S_n, S_{n-1}, \ldots$. On démontre que le nombre des équations d'ordre égal ou inférieur à n est

$$N_n = p - I_m - \varphi_0(-n)(p - I_{m-1}) - \ldots - \varphi_{m-1}(-n)(p - I_0),$$

pourvu que n soit égal ou supérieur à l'ordre d'une forme canonique du système. Il existe donc *un polynome* $P(z)$ *associé au système* S, d'ordre égal au nombre des variables et tel que

$$N_n = P(n)$$

pour toute valeur de n supérieure à un certain nombre fixe.

2° *L'intégration d'un système différentiel à plusieurs inconnues et m variables peut toujours se ramener à l'intégration d'un système à une seule inconnue et m variables ayant les mêmes invariants* $I_0, I_1, \ldots, I_{m-1}$ *suivie de l'intégration d'un système d'équations différentielles ordinaires.*

3° Étant donné un système différentiel S_u aux inconnues $u_1, u_2, \ldots, u_p$, introduisons de nouvelles inconnues $v_1, v_2, \ldots, v_q$, fonctions des variables, des u et de certaines de leurs dérivées. Soit S_v le système transformé aux inconnues $v_1, \ldots, v_q$.

Convenons de dire que le changement d'inconnues est une transformation réversible appartenant à S_u si, en tenant compte des équations S_u, les équations de définition des v permettent d'exprimer les u en fonction des variables, des v et de certaines de leurs dérivées.

Si la transformation est réversible et appartient à S_u, *les deux systèmes* S_u, S_v *ont les mêmes invariants* $I_0, I_1, \ldots, I_m$ *et la transformation réversible appartient aussi à* S_v

et, comme cas particulier,

S'il n'y a qu'une inconnue u et qu'une inconnue v, la transformation, supposée réversible, transforme une équation unique en une équation unique du même ordre.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Un théorème sur les équations intégrales.* Note de M. **Tommaso Boggio**, présentée par M. Emile Picard.

1. Envisageons l'équation intégrale, avec le paramètre λ,

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b p(y) f(x, y) \varphi(y) \, dy = \psi(x), \tag{1}$$

où $\varphi(x)$ est la fonction inconnue, $p(y)$ est une fonction donnée, qui a un *signe constant* dans le champ d'intégration, $f(x, y)$ est une fonction donnée, *symétrique* en x et y, et $\psi(x)$ une fonction donnée.

Des recherches classiques de M. Fredholm sur les équations intégrales, il résulte d'abord que la solution $\varphi(x)$ de l'équation (1), envisagée comme fonction de λ, est une fonction *méromorphe*.

J'ajoute maintenant le résultat suivant, qui a de nombreuses applications dans la Physique mathématique :

Les pôles de la fonction $\varphi(x)$ *sont tous réels et simples.*

Je remarque d'abord que de l'équation (1) on tire

$$p(x)\varphi(x) - \lambda \int F(x, y)\varphi(y)\,dy = p(x)\psi(x), \tag{2}$$

où la fonction $F(x, y) = p(x)p(y)f(x, y)$ est *symétrique* en x et y. (Dans cette formule et dans les suivantes les limites a et b des intégrales sont sous-entendues.)

Ensuite, si λ_r, λ_s sont deux pôles (ou autovaleurs) (Eigenwerte, suivant M. Hilbert) de l'équation (1), et $\varphi_r(x)$, $\varphi_s(x)$ deux autofonctions correspondantes (Eigenfunctionen, suivant M. Hilbert), on a

$$p(x)\varphi_r(x) - \lambda_r \int F(x, y)\varphi_r(y)\,dy = 0,$$

$$p(x)\varphi_s(x) - \lambda_s \int F(x, y)\varphi_s(y)\,dy = 0,$$

d'où, multipliant ces équations respectivement par $\lambda_s\varphi_s(x)\,dx$ et $\lambda_r\varphi_r(x)\,dx$, puis intégrant et retranchant,

$$(\lambda_r - \lambda_s)\int p(x)\varphi_r(x)\varphi_s(x)\,dx = 0,$$

donc, si λ_r *est différent de* λ_s,

$$\int p(x)\varphi_r(x)\varphi_s(x)\,dx = 0.$$

De cette égalité on déduit que les *pôles sont réels;* car, dans le cas contraire, en prenant les pôles (imaginaires conjugués)

$$\lambda_r = \alpha + i\beta, \qquad \lambda_s = \alpha - i\beta,$$

et les autofonctions correspondantes (nécessairement conjuguées)

$$\varphi_r(x) = \varphi' + i\varphi'', \qquad \varphi_s(x) = \varphi' - i\varphi'',$$

ne serait plus vérifiée l'égalité précédente.

L'existence effective des pôles peut être prouvée par une méthode analogue à celle employée, par exemple, par M. Kneser, dans le cas où $p(y) = 1$ (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XXII, 1906).

2. Il est facile de voir que *les pôles sont simples* (¹).

Supposons, en effet, que $\lambda = \lambda_0$ soit un pôle d'ordre $m (m > 1)$ de la solution de l'équation (1); on aura

$$\varphi(x) = \frac{u(x)}{(\lambda - \lambda_0)^m} + \frac{v(x)}{(\lambda - \lambda_0)^{m-1}} + \ldots;$$

donc, en substituant dans l'égalité (2),

$$pu + (\lambda - \lambda_0) pv + \ldots - \lambda \int \mathrm{F}.[u + (\lambda - \lambda_0) v + \ldots]\, dy = (\lambda - \lambda_0)^m p\psi,$$

et dérivant par rapport à λ :

$$(3) \quad pv + \ldots - \lambda \int \mathrm{F}.(v + \ldots)\, dy - \int \mathrm{F}.[u + (\lambda - \lambda_0) v + \ldots]\, dy = m(\lambda - \lambda_0)^{m-1} p\psi.$$

Si l'on pose $\lambda = \lambda_0$, on tire de ces deux équations

$$(4) \qquad p(x)\, u(x) - \lambda_0 \int \mathrm{F}(x, y)\, u(y)\, dy = 0,$$

$$(5) \quad p(x)\, v(x) - \lambda_0 \int \mathrm{F}(x, y)\, v(y)\, dy = \int \mathrm{F}(x, y)\, u(y)\, dy = \frac{1}{\lambda_0} p(x)\, u(x).$$

Multipliant ensuite l'équation (4) par $v(x)\, dx$, l'équation (5) par $u(x)\, dx$, puis intégrant et retranchant, on a

$$\int p(x)\, [u(x)]^2\, dx = 0.$$

La fonction u devrait donc être identiquement nulle, ce qui est absurde. Notre théorème est complètement démontré.

De l'égalité (3) il résulte que le calcul précédent ne s'applique pas à $m = 1$.

Il est bon de remarquer que le pôle $\lambda = \lambda_0$ peut être racine multiple d'ordre quelconque pour le *déterminant* de l'équation (1), tandis que pour la fonction $\varphi(x)$ il est nécessairement un pôle simple.

Le théorème analogue pour les systèmes d'équations linéaires algébriques

---

(¹) Comparer cette démonstration avec celle que donne M. Picard dans le cas particulier des membranes élastiques dans le paragraphe 20 de son Mémoire des *Rendiconti di Palermo* (1906) : *Sur quelques applications de l'équation fonctionnelle de Fredholm*.

du type $x_i - \lambda \sum_k a_{ik} x_k = \alpha_i \; (a_{ik} = a_{ki};\; i, k = 1, 2, \ldots, n)$ peut être regardé comme connu, car il résulte immédiatement des propriétés classiques de l'équation des inégalités séculaires des planètes.

3. Je me bornerai ici à montrer une application intéressante du théorème que je viens de démontrer, lequel subsiste évidemment pour un nombre quelconque de variables.

Envisageons un solide élastique isotrope S et cherchons la déformation du corps S, dans l'hypothèse où l'on connaît la déformation de sa surface, ou bien les forces qui agissent sur sa surface. J'ai établi dans deux Notes récentes (1) que les composantes du déplacement dépendent de la résolution d'une équation intégrale, qui a pour noyau (Kern) une fonction symétrique, qui dépend du paramètre qui figure dans les équations de l'équilibre. On conclut donc, du théorème précédent, que les pôles de la solution de chacun de ces deux problèmes de l'équilibre *sont tous réels et simples*.

CHIMIE. — *Sur l'analyse des mélanges d'air et de gaz ou vapeurs combustibles.* Note de M. **Jean Meunier**, présentée par M. Troost.

La méthode dont je me suis servi pour analyser les mélanges d'éther et d'air (*Comptes rendus*, t. CXIV, p. 796 et 1107) s'applique également à tous les gaz ou vapeurs inflammables, ainsi qu'aux liquides qui les émettent. Toutefois, en opérant au moyen d'éprouvettes à volume fixe, les proportions des mélanges effectués ne peuvent être que des multiples du poids de la goutte donnée par la pipette, et il est impossible de *puiser* les gaz à analyser. Ces difficultés m'ont engagé à faire construire un nouvel appareil représenté ci-contre (*fig.* 1).

C'est une éprouvette en verre de 300^{cm^3}, dont la graduation en centimètres cubes est la même que celle des éprouvettes ordinaires, mais numérotée à l'inverse. Le fond est formé par un piston mobile en cuir embouti commandé par une tige à vis se manœuvrant d'en bas et sur lequel on verse une certaine quantité de mercure. Pour rendre le

---

(1) Boggio, *Nuova risoluzione di un problema fondamentale della teoria dell' elasticità* et *Determinazione della deformazione di un corpo elastico per date tensioni superficiali* (*Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, 5e série, t. XVI, 2e sem. 1907).

mouvement du piston plus rapide, la vis s'engage dans un écrou fileté à trois pas. La partie supérieure est faiblement étranglée et rodée coniquement, de façon que l'on puisse la coiffer d'un chaperon de verre qui se termine par une amorce de tube ouverte sur laquelle on peut brancher les tubes abducteurs. L'orifice de l'amorce est étroit, de sorte qu'il est facile de le boucher avec le doigt pendant l'agitation, et cela empêche le remous du gaz intérieur avec l'extérieur. L'appareil est maintenu vertical par un

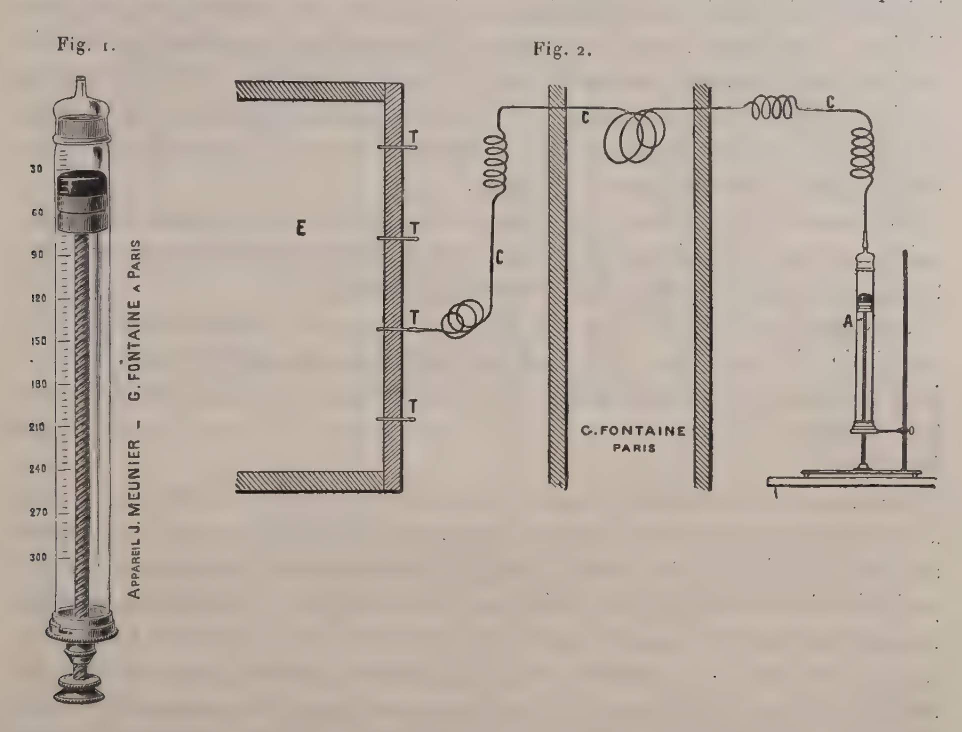


Fig. 1.

Fig. 2.

support. En raison de la forme, je n'ai pu faire commencer la graduation que vers 30$^{cm^3}$, mais il est facile de mesurer les quantités plus faibles, puisque les volumes se lisent aussi bien par le déplacement du piston que par celui du niveau du mercure. La capacité libre du chaperon n'est pas comprise dans la graduation; on la jauge instantanément après avoir introduit une quantité convenable de mercure dans l'appareil; il suffit de soulever le piston jusqu'au haut de sa course afin de remplir de mercure la capacité libre jusqu'à l'amorce et de lire la division en regard de la partie supérieure du piston; on procède de même, après avoir abaissé le niveau du mercure au ras de l'éprouvette. On tient compte du volume ainsi déterminé dans les lectures subséquentes.

Mélanges gazeux effectués en proportion quelconque. — J'introduis dans

l'appareil des poids connus de liquide volatil au moyen de la pipette, comme je l'ai expliqué dans mes précédentes Notes. Pour obtenir les mélanges en proportion donnée, je réalise d'abord un mélange type contenant 1^{mg} de vapeur en 10^{cm^3}; à cet effet, disposant d'une pipette donnant, je suppose, la goutte de 11^{mg}, je laisse tomber 2 gouttes dans l'éprouvette, je la coiffe, j'ajuste le niveau du mercure de manière à faire un volume de 220^{cm^3} et j'agite. Le mélange type permet de faire un mélange quelconque. Soit à réaliser, par exemple, le mélange de 72^{mg} en 1^{l} ou 18^{mg} en 250^{cm^3}; je relève le piston pour ne conserver que 180^{cm^3} du type, puis je l'abaisse au volume de 250^{cm^3} et j'agite. Pour obtenir le mélange à 80^{mg} j'opérerais semblablement, en conservant 200^{cm^3} du type.

Les teneurs de mélange comprises entre 88^{mg} et 132^{mg} nécessitent un mélange type de $1^{mg},5$ en 10^{cm^3} formé avec 3 gouttes au lieu de 2; pour les teneurs de 132^{mg} à 176^{mg} il faut prendre 4 gouttes.

Puisage et analyse des gaz. — L'appareil permet d'aller chercher les gaz à la distance que l'on veut et dans une atmosphère quelconque. Cela pourra, je crois, permettre d'effectuer des recherches pour l'industrie et pour l'hygiène en nombre de circonstances où cela n'a pu encore être fait.

Le mercure étant relevé jusqu'à l'amorce, il suffit de brancher sur cette amorce la canalisation abductrice (*fig.* 2) et de faire appel de gaz en abaissant le piston. On trouve dans le commerce des tubes de cuivre de petit diamètre dont la section intérieure peut être de 1^{mm^2} seulement; recuits, ils sont flexibles et faciles à contourner de toutes façons. Ils sont tout indiqués pour servir à la canalisation C. Comme la figure 2 le représente, il suffit de contourner en ressort à boudin les parties où l'on veut obtenir des allongements dans le sens vertical et dans le sens horizontal. Aux extrémités sont soudées des amorces pour brancher les raccords en tube de caoutchouc.

Il est ainsi facile d'aller chercher le gaz dans une enceinte E sans y pénétrer, de peur de troubler la composition, ou parce que l'atmosphère est dangereuse ou irrespirable. Dans le cas d'une soute de navire, on pourra ménager des prises de gaz T à différentes hauteurs de la paroi et les relier tour à tour avec la canalisation unique amenant le gaz à l'appareil A dans le laboratoire. La section ayant 1^{mm^2}, la capacité sur 1^{m} de longueur sera de 1^{cm^3}; on pourra donc purger d'un seul coup 300^{m} de longueur, puisque la capacité de l'appareil est de 300^{cm^3}. Avec une section aussi faible les gaz

ne peuvent se mélanger, et il suffit de rejeter la première prise pour être certain que le gaz vient ensuite exempt de mélange.

Analyse. — Quand il s'agit de vapeurs d'éther, j'admets comme repère la proportion de 60^{mg}, bien que l'on puisse obtenir l'inflammation à des proportions plus faibles; dans ce dernier cas, les résultats sont irréguliers. Soit à analyser de l'air contenant, par exemple, 33^{mg} d'éther au litre; en me servant du mélange type à la teneur de 1^{mg} en 10^{cm^3}, j'introduis dans l'appareil 10^{mg} de vapeur en 100^{cm^3}, puis 100^{cm^3} de l'air à analyser; le mélange agité contiendra au total $13^{mg},3$ en 200^{cm^3} ou 66^{mg} au litre, il sera nettement inflammable. Après cette opération j'en ferai une autre semblable avec $7^{mg},5$ qui ne donnera pas d'inflammation, puis une ou deux autres à des teneurs intermédiaires qui achèveront de me fixer.

Dans le cas d'air irrespirable, parce qu'il est chargé de gaz carbonique ou autre gaz délétère, on pourra obtenir facilement des indications utiles et précises, ces gaz ne s'enflammant pas et éteignant l'allumette plongée dans l'éprouvette. Il est facile aussi de refouler le gaz de l'éprouvette dans une cloche graduée pour pratiquer l'analyse du gaz suivant les méthodes nouvelles.

CHIMIE ANALYTIQUE. — *Nouveau perfectionnement permettant de rechercher et de doser rapidement le formène ou méthane.* Note de M. **Nestor Gréhant**, présentée par M. E. Perrier.

Un très grand nombre d'expériences comparatives, que j'ai déjà publiées en partie, m'ont permis de reconnaître qu'un seul passage d'un courant électrique, à travers un fil de platine porté au rouge blanc dans des mélanges de formène et d'air compris entre 5 pour 100 et 1 pour 100, ne produit qu'une combustion incomplète du carbure d'hydrogène; il est nécessaire, pour que toutes les molécules gazeuses viennent se brûler dans l'ampoule de mon eudiomètre-grisoumètre, de faire passer 200 fois, 400 fois et plus le courant dans la spirale de platine; c'est là un résultat capital et, pour le démontrer complètement, j'ai l'honneur de communiquer à l'Académie les chiffres que j'ai obtenus dans deux analyses que j'ai faites successivement.

1° *Analyse eudiométrique du formène.* — J'introduis, dans une cloche de 50^{cm^3}, 12^{cm^3} de gaz préparé par l'acétate de soude et la chaux sodée; j'ajoute 24^{cm^3} d'oxygène et je complète avec de l'air, pour obtenir exactement 50^{cm^3} d'un mélange qui est

rendu homogène par l'agitation; on obtient, par un seul passage du courant au rouge blanc, une forte détonation et une flamme; le volume du gaz après absorption de l'acide carbonique devient $14^{cm^3},8$; la réduction totale est égale à $50 - 14,8 = 35,2$ dont le tiers $11^{cm^3},733$ nous fait connaître le volume du formène pur; la proportion $\frac{12}{11,733} = \frac{100}{x}$ donne $x = 97,7$ pour 100.

2° *Analyse du même gaz dans l'eudiomètre-grisoumètre.* — J'ajoute à 60^{cm^3} d'air 3^{cm^3} de formène, et voici les réductions obtenues par le courant des accumulateurs :

	200 passages.	400 passages.	600 passages.	800 passages.
	63^{cm^3}	$56,5^{cm^3}$	$54,7^{cm^3}$	
Volumes après la combustion.	58	54,9	54,2	$54,2^{cm^3}$
KOH......................	56,5	54,7	54,2	54,2
Réductions................	6,5	1,8	0,5	0

La somme des réductions est égale à 8,8, dont le tiers est 2,933; nous écrivons la proportion :

$$\frac{3}{2,933} = \frac{100}{x}; \qquad \text{d'où} \qquad x = 97,7 \text{ pour } 100.$$

Ce résultat est identique à celui de l'analyse précédente.

Je dois faire remarquer que la seconde analyse exige environ une demi-heure, aussi j'ai essayé d'accélérer l'opération par un emploi méthodique du gaz de la pile préparé dans un appareil de Bunsen (*Méthodes gazométriques*).

3° *a.* J'ajoute à 52^{cm^3} d'air 2^{cm^3} de formène et 16^{cm^3} de gaz de la pile dans l'eudiomètre-grisoumètre : les gaz sont agités avec soin et je fais passer une seule fois le courant; on observe une flamme et l'on entend une petite détonation. Le gaz de la pile a disparu, et 54^{cm^3} de gaz après l'action de la potasse se réduisent à $48^{cm^3},5$; le tiers de la réduction est égal à $1^{cm^3},83$. On retrouve donc $1^{cm^3},83$ au lieu de 2^{cm^3}.

b. A 49^{cm^3} d'air j'ajoute 1^{cm^3} de formène et 20^{cm^3} de gaz de la pile; après l'agitation, le fil de platine, porté au rouge blanc, donne une belle flamme et une détonation : la réduction est $3^{cm^3},1$ dont le tiers est égal à $1^{cm^3},03$ de formène.

Conclusion. — Le dosage du formène dans les mélanges rares, à l'aide du gaz de la pile, donne des résultats suffisamment exacts dans la pratique et, cette opération ne durant que 10 minutes environ, le nombre des analyses faites chaque jour de l'air puisé dans les houillères peut être multiplié considérablement.

ÉLECTROCHIMIE. — *Sur les réactions de la cuve de nickelage.* Note de M. A. **Brochet**, présentée par M. A. Haller.

Le dépôt de nickel demande la neutralité du bain. Une légère réaction acide donne un dépôt très blanc, mais la présence des ions $H^{\cdot}$ détermine un dégagement gazeux et, pour une faible épaisseur, le métal *lève* sous forme d'écailles. Ce *levage* est dû à l'occlusion d'hydrogène, lequel existe d'ailleurs plus ou moins dans tous les dépôts de nickel et de cobalt électrolytiques.

En présence de sulfates on constate la mise en liberté d'acide sulfurique avec dégagement d'oxygène. Cela tient à ce que le nickel est passif et se comporte comme une anode insoluble.

L'électrolyse des sels de nickel donne de mauvais résultats s'ils sont seuls; dans le cas du chlorure, il se dépose sur la cathode de l'hydrate d'oxyde de nickel; avec le sulfate, cet hydrate ne se forme pas du fait de l'acidité provenant de la passivité de l'anode. La présence des sels alcalins, notamment des sels ammoniacaux, est donc nécessaire pour la bonne marche de l'opération. Ils donnent avec le sulfate de nickel des sels complexes qui se dissocient [1] en cations $(NH^4)^{\cdot}$ par exemple, et en anions $(SO^4)^2 Ni''$. Ces derniers ont leur charge neutralisée par celle des ions $Ni^{\cdot\cdot}$ fournis par l'anode. Il y a production de sulfate de nickel et en outre, comme nous l'avons vu, d'oxygène et d'acide sulfurique.

Quant au peroxyde de nickel, il résulte de la formation intermédiaire du sulfate nickelique instable.

L'addition de chlorures au bain supprime la passivité, mais ne modifie pas les réactions. Celles qui se passent à l'anode se font par l'intermédiaire de l'anion $(NiCl^4)''$, d'où la tendance plus grande à former du peroxyde. C'est le principal inconvénient de l'addition des chlorures au bain de nickelage.

Dans tous les cas, le nickel déposé provient d'une réaction secondaire résultant de la décharge du cation $(NH^4)^{\cdot}$ et de la décomposition du sulfate simple, s'il est en excès. Des cations se déchargent de même au détriment des éléments de l'eau, d'où dégagement d'hydrogène et formation d'alcali qui se trouve neutralisé dans le cas des sulfates; mais en présence de chlorures, comme le bain reste neutre, il en résulte un précipité d'hydrate d'oxyde de nickel qui se répand dans le bain ou dont une partie, sans avoir été

---

(1) W. Pfanhauser, *Zeitsch. f. Elektrochemie*, t. VII, 1901, p. 628.

préalablement libérée, peut être déposée en même temps que le métal, ce qui donne le dépôt gris et de vilain aspect que l'on observe fréquemment dans ces conditions.

Dans l'opération du nickelage on se trouve donc en présence d'un bain dont soit l'acidité, soit le dépôt d'hydrate va en augmentant. On remédie à l'acidité en ajoutant des sels peu dissociables. Le citrate de sodium présente l'inconvénient d'être d'un prix élevé, d'entretenir les moisissures et de se décomposer sous l'influence du courant. Aussi préfère-t-on opérer en présence de chlorures. Nous venons de voir leurs inconvénients, on y remédie en ajoutant au bain de l'acide borique. Celui-ci à peine ionisable n'a d'autre effet que de compenser l'action due à la présence de l'hydrate d'oxyde de nickel, encore moins dissociable et de donner au dépôt la blancheur que la présence de l'oxyde tend à lui faire perdre.

La passivité plus ou moins grande des anodes de nickel dépend de la nature physique du métal, variable suivant le laminage auquel il a pu être soumis et non de sa pureté.

C'est un fait bien connu que les anodes fondues s'attaquent mieux que les anodes laminées en plaques de 5^{mm} à 8^{mm} que l'on emploie généralement. Quant aux feuilles minces elles sont presque inattaquables (1 à 5 pour 100 de la théorie pour une densité de courant de 1 ampère par décimètre carré avec une solution de sulfate double à 100^{g} par litre).

L'attaque des anodes de nickel est tout à fait spéciale. Elles se piquent en un certain nombre de points et donnent naissance à des cavités qui se creusent de plus en plus au point d'amener la perforation de l'électrode qui, en d'autres points, conserve son épaisseur.

Nous poursuivons l'étude de ce phénomène probablement lié à la passivité.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Sur un alcool vinylique du type* $\text{Ar R} = \text{C} = \text{CHOH}$. Note de MM. **Tiffeneau** et **Daufresne**, présentée par M. Haller.

Aucun alcool vinylique secondaire [1] ne semble encore avoir été isolé; un seul, l'alcool vinylique ordinaire, a pu être obtenu à l'état de combinaison

(1) On connaît un alcool vinylique tertiaire : le triphényléthénol (Fd 136°) (Biltz, *D. ch. Ges.*, t. XXXII, p. 650); nous l'avons obtenu, M. Dorlencourt et moi, dans l'action de l'acide sulfurique au cinquième sur le triphénylglycol (Fd 164°); ce composé diffère des autres alcools vinyliques tertiaires ou plutôt de leurs dérivés, puisque seuls ceux-ci sont connus.

métallique (¹); les autres ne sont connus qu'à l'état d'éthers oxydes et il n'a pas été jusqu'ici possible de transformer ces dérivés en alcools vinyliques correspondants; aussi admet-on généralement qu'aussitôt formés les éthénols ou vinols se transforment spontanément en aldéhydes :

$$R - CH = CHOH \rightarrow R - CH^2 - CHO.$$

Pénétrés de cette idée courante que les alcools vinyliques ne peuvent exister à l'état libre, nous avons dans une Note antérieure (²) considéré comme *anisylcyclopropanol* un alcool cristallisé qui est un véritable alcool vinylique : le méthylanisyléthénol

$$\begin{matrix} OCH^3 - C^6H^4 \\ CH^3 \end{matrix} \!\!> C = CHOH.$$

Préparation. — Cet alcool méthylanisyl-vinylique s'obtient, comme nous l'avons déjà annoncé, par l'action successive de l'acétate de potassium sec en solution alcoolique puis de la potasse alcoolique sur le dibromure d'estragol. La première réaction donne naissance à un produit qui paraît être un mélange des deux acétobromhydrines. Nous indiquerons ici que le mécanisme de cette curieuse réaction comporte pour le moins une transposition moléculaire

$$OCH^3 - C^6H^4 - CH^2 - CHBr - CH^2Br \rightarrow OCH^3 - C^6H^4 - C \begin{matrix} \nearrow CHOH \\ \searrow CH^3 \end{matrix}$$

Propriétés. — Recristallisé dans le benzène, cet alcool fond à 79°; il distille vers 154°-155° sous 14mm, mais il ne peut être distillé à la pression ordinaire sans s'isomériser. Difficilement soluble dans l'eau froide, il se dissout assez aisément dans l'eau bouillante, d'où il cristallise par refroidissement en paillettes cristallines. Ses solutions aqueuses ne précipitent pas par l'acétate de cuivre; elles réduisent instantanément le permanganate de potassium à froid.

En milieu neutre ou alcalin, cet alcool vinylique est stable à chaud dans les divers solvants organiques.

(¹) Nef, *Liebigs Annalen*, t. CCXCVIII, p. 316.

(²) Tiffeneau et Daufresne, *Comptes rendus*, t. CXLIV, p. 924; *Bull. Soc. Chim.*, 4e série, t. I, p. 106. Nos prévisions théoriques concernant la formation des cyclopropanols se sont néanmoins confirmées; il a été possible de passer des composés $Ar - CH^2 - CHOH - CH^2X$ aux cyclopropanols correspondants; ceux-ci ne fixent pas Br^2; ils possèdent la réfraction moléculaire théorique et ne s'isomérisent pas par chauffage, seuls ou avec des acides, en aldéhydes hydratropiques.

Il fixe Br^2, ne colore pas le réactif de Schiff et ne se combine pas au bisulfite de soude. Il ne fournit pas de phényluréthane; on le retrouve inaltéré après l'action de l'isocyanate de phényle qui ne peut le déshydrater et ne donne pas de diphénylurée. Nous avons essayé de déshydrater cet alcool par les déshydratants neutres tels que $BrMgC^2H^5$ au bain d'huile; la réaction est violente et ne fournit que des produits résineux; il eût été cependant intéressant de reproduire sur cet alcool la transposition observée par l'un de nous ([1]) sur un bromure correspondant

$$\overrightarrow{Ar - (CH^3) - C} = CH\,Br \xrightarrow{-HBr} CH^3 - C \equiv C - Ar.$$

Isomérisation. — La distillation à la pression ordinaire le transforme en aldéhyde *p*-méthoxyhydratropique; l'oxyde de méthylanisyléthylène de MM. Béhal et Tiffeneau ([2]) s'isomérise de même par distillation, mais ces deux composés diffèrent par toutes leurs autres propriétés physiques et chimiques. Les acides dilués effectuent également cette isomérisation; conservé dans le vide sulfurique, notre alcool vinylique s'isomérise également peu à peu en aldéhyde. La règle d'Erlennmeyer ([3]) se trouve une fois de plus confirmée, mais la transformation ne s'effectue pas spontanément, comme on pouvait le croire jusqu'ici.

Méthylation. — Traité à chaud en solution dans l'alcool méthylique sodé par le sulfate de méthyle, l'alcool vinylique se transforme en éther-oxyde correspondant

$$\begin{matrix} OCH^3 - C^6H^4 \diagdown \\ CH^3 \diagup \end{matrix} C = CH\,OCH^3.$$

Cet éther oxyde bout à 262°-264°; $d_0 = 1,073$; $d_{4°}^{15°,7} = 1,0615$; cet oxyde fixe Br^2, il réduit instantanément le permanganate à froid; sa réfraction moléculaire concorde avec une double liaison dans la chaîne latérale. Chauffé avec l'acide sulfurique dilué, il se transforme quantitativement en aldéhyde *p*-méthoxyhydratropique. Cet éther-oxyde est identique à celui préparé récemment par l'un de nous ([4]) dans l'action de l'oxyde jaune sur la méthyliodhydrine de l'anéthol $OCH^3 - C^6H^4 - CH(OCH^3) - CHI - CH^3$.

Acétylation. — Chauffé au bain-marie avec l'anhydride acétique, l'alcool vinylique se transforme quantitativement en acétate (éb. 164°-165° sous 13mm, 288° à la pression ordinaire); $d_0 = 1,124$; $d_{4°}^{16°,8} = 1,111$; $n_D^{16°,8} = 1,5409$; R. M. trouvée = 58,27; R. M. calculée = 57,11. Cet acétate vinylique fixe Br^2; il réduit le permanganate à froid; saponifié, il régénère l'alcool vinylique. Nous avons jusqu'ici échoué dans nos tentatives pour le préparer de toutes pièces en faisant agir HgO sur l'acétoiodhydrine de l'anéthol par une réaction analogue à celle qui a permis d'obtenir l'éther méthylique ci-dessus décrit; nous poursuivons néanmoins l'étude de cette réaction qui conduirait à l'obtention régulière d'autres alcools vinyliques.

([1]) Tiffeneau, *Comptes rendus*, t. CXXXV, 1902, p. 1348.
([2]) Béhal et Tiffeneau, *Comptes rendus*, t. CXLI, p. 596.
([3]) Erlennmeyer, *D. ch. Ges.*, t. XIII, p. 309; t. XXV, p. 1781.
([4]) Tiffeneau, *Comptes rendus*, t. CXLV, p. 593.

En résumé, les alcools vinyliques du type $ArR = C = CHOH$ sont isolables; leur stabilité dans les milieux neutres ou alcalins est suffisante pour qu'on puisse songer à les obtenir régulièrement; l'étude du mécanisme de la réaction qui donne naissance au méthylanisyléthénol et la connaissance des propriétés des alcools vinyliques nous permettront probablement de préparer quelques autres représentants de cette classe de composés jusqu'ici inconnus.

BOTANIQUE. — *Sur un arbre à caoutchouc du Tonkin.* Note de MM. **Dubard** et **Eberhardt**, présentée par M. Gaston Bonnier.

Parmi les végétaux producteurs de caoutchouc, on n'a signalé jusqu'à présent en Indo-Chine et particulièrement au Tonkin que des lianes appartenant exclusivement à la famille des Apocynées. Les tiges de ces végétaux n'acquièrent jamais un diamètre bien considérable et sont d'une exploitation difficile; il en résulte que le rendement reste toujours peu élevé, même lorsqu'on sacrifie les sujets. C'est pour cette raison qu'on a tenté la culture d'arbres d'introduction au premier rang desquels il faut citer l'*Hevea brasiliensis*, le *Manihot Glaziowii* et le *Ficus elastica ;* mais les résultats de ces essais, pour se faire longtemps attendre, n'en sont pas moins souvent peu satisfaisants. Il est donc d'un intérêt tout spécial pour notre colonie d'Extrême-Orient de posséder un arbre à caoutchouc de grande dimension, spontané sur son territoire et fournissant un bon produit. C'est cette découverte que nous nous proposons de faire connaître aujourd'hui.

L'essence productrice se rencontre au Tonkin, où elle forme des peuplements très denses dans toute la province de Bac-Kan et dans le sud des provinces de Bao-Lac et de Cao-Bang; elle croît de préférence sur les pentes dont le sous-sol est formé de schistes calcaires, de telle façon que l'humus garde une fraîcheur constante, sans qu'il y ait stagnation d'eau. Certains peuplements dans la forêt renferment jusqu'à 40 pour 100 d'arbres producteurs de caoutchouc.

Le latex qui s'écoule de ces arbres contient une proportion très élevée de caoutchouc, vraisemblablement supérieure à celle que donne l'*Hevea :* le produit est extrêmement nerveux, résistant, doué d'une grande adhésivité et, d'après les spécialistes les plus autorisés, ne peut être distingué commercialement des meilleures sortes de *Para;* vu la richesse particulière du

latex, il est probable que le procédé de coagulation par enfumage serait d'un emploi avantageux.

L'étude botanique de cet arbre nous permet de le rapporter au genre *Bleekrodea*, de Blume ([1]), qui rentre dans la tribu des *Fatouées*, famille des *Moracées;* ce genre comptait déjà deux espèces, l'une de Madagascar, l'autre de Bornéo. L'espèce du Tonkin est nettement distincte des deux autres, notamment par les caractères de la feuille et de l'inflorescence; nous en ferons le *B. tonkinensis*, dont voici les principaux caractères :

Arbre à croissance rapide, atteignant fréquemment de 10^m à 15^m de haut, à branches très ramifiées, écorce blanchâtre couverte de lenticelles, bois blanc inutilisable en menuiserie et ébénisterie.

Feuilles oblongues lancéolées, à bords sinueux, terminées par un long acumen recourbé latéralement; pétiole très court; nervures secondaires au nombre de cinq à sept paires, très saillantes sur la face inférieure, à peine visibles sur la supérieure; nervation tertiaire lâche, perpendiculaire à la précédente. Stipules petites, pointues, disposées latéralement et caduques de bonne heure.

Fleurs monoïques, disposées en petites cymes axillaires pédonculées et condensées au point de simuler une sorte de capitule; sur un même rameau, on trouve des inflorescences entièrement mâles, d'autres portant au centre une seule fleur femelle. L'axe de chaque cyme, ses courtes ramifications et les périanthes sont couverts d'un fin duvet.

La fleur mâle, à l'état de bouton, est presque sphérique; le périanthe est formé de quatre ou cinq sépales valvaires, formant une sorte de calyptre qui se subdivise à l'épanouissement en quatre ou cinq lobes triangulaires, sur les deux tiers de la hauteur du périanthe; l'androcée comprend quatre ou cinq étamines, épisépales, souvent inégales, à filets reployés dans le bouton, élastiques, fortement élargis à la base; les anthères sont biloculaires, presque globuleuses et fixées vers le milieu du connectif; au centre, on trouve un ovaire rudimentaire formant une sorte de plateau brunâtre; enfin chaque fleur mâle est munie de deux bractées accolées au périanthe.

La fleur femelle présente un périanthe tubuleux, terminé par quatre dents plus ou moins nettes, entourant l'ovaire comme dans une sorte de sac; appliquées sur ce périanthe, on observe deux bractées florales ovales et terminées en pointe; l'ovaire est sessile, uniloculaire et ne renferme qu'un seul ovule campylotrope, à micropyle supère et accroché tout à fait à la partie supérieure de la cavité; le style s'insère latéralement, vers le milieu de la hauteur de l'ovaire, dépasse peu l'enveloppe du périanthe et se subdivise en deux longs stigmates filiformes, un peu inégaux.

Le fruit (non mûr sur les échantillons examinés) est un akène monosperme, entouré du calice accrescent et charnu et des bractées florales également accrescentes; la graine est sans albumen et contient un embryon presque sphérique, à tigelle recourbée sur

---

([1]) Blume, *Mus. Bot. Lug. Bat.*, t. II, p. 87.

le dos d'un cotylédon; au degré de maturité observé, les cotylédons, très épais, sont sensiblement égaux.

En résumé : 1° L'absence de corolle, la courbure des étamines dans le bouton, la présence de laticifères dans l'appareil végétatif caractérisent une *Moracée*, l'organisation de l'inflorescence détermine une *Fatouée* et la structure du périanthe chez la fleur femelle est particulière au genre *Bleekrodea*;

2° L'ensemble des caractères botaniques montre que nous avons affaire à une espèce nouvelle, qui, s'ajoutant à deux espèces, l'une malgache, l'autre de Bornéo, vient fournir une nouvelle preuve de l'existence d'un ancien continent indo-malais-malgache;

3° L'espèce considérée présente un grand intérêt économique, parce que c'est le premier arbre à caoutchouc signalé en Indo-Chine, qu'elle forme des peuplements nombreux et denses et que son produit est de tout premier ordre.

PHYSIOLOGIE. — *Sur la réception de l'excitant lumineux dans les yeux composés des Insectes, en particulier chez les Muscides.* Note de M. **P. Vigier**, présentée par M. J. Chatin.

La célèbre théorie de la *vision en mosaïque*, proposée par Johannes Müller (1826) pour expliquer le mécanisme de la vision par les yeux composés, a été, après bien des vicissitudes, restaurée et étendue par les recherches de S. Exner (1891), dont les conclusions sont généralement admises.

Sur la rétine totale, formée par la juxtaposition radiaire d'autant de rétinules qu'il y a d'ommatidies dans l'œil composé, se peindrait une image unique et droite, c'est-à-dire de même sens que l'objet. Cette *image rétinienne droite* se réaliserait, d'après Exner, selon l'un des deux processus suivants :

Soit par *apposition* d'autant de petites taches lumineuses qu'il y a d'ommatidies, l'impression reçue par chacune d'elles résultant de la concentration, à travers ses milieux transparents, d'un faisceau de rayons provenant d'une aire du champ visuel plus ou moins étroite et située dans le prolongement de l'axe de cette ommatidie;

Soit par *superposition* de taches ou de cercles de diffusion, se recouvrant en partie les uns les autres et renforçant l'impression; dans ce dernier cas, l'image totale, également droite, serait plus lumineuse que celle obtenue dans la mosaïque précédente.

Il n'est nullement question, comme on le voit, des petites images renversées qui sont projetées par la cornéule de chaque ommatidie, et dont

l'existence fut pourtant bien souvent constatée depuis l'observation mémorable de Leeuwenhoek.

Or la théorie de l'image rétinienne droite est contredite par nombre de faits tirés non seulement de l'étude de l'œil composé, mais aussi de celle, non moins importante, des voies de transmission qui unissent cet organe récepteur aux centres de la perception optique.

Pour montrer l'insuffisance de cette théorie, je prendrai tout d'abord l'exemple le plus typique, celui des Diptères.

Quelles sont les raisons pour lesquelles on refuse toute signification physiologique aux petites images renversées projetées par les cornéules ? Les objections principales sont les suivantes. On prétend que :

1° S'il est vrai que, dans certaines conditions expérimentales, la cornéule projette une petite image renversée, cette image ne peut pas se former dans les conditions naturelles; car, dans ce cas, il existe derrière la cornéule un autre organe de réfraction, le cône, qui s'oppose à la formation de cette image et qui a pour rôle de concentrer en un faisceau les rayons provenant des objets situés sur le prolongement de l'axe de l'ommatidie;

2° Alors même qu'une image renversée se produirait, il n'existe pas, dans la rétinule de chaque ommatidie, de surface sensorielle capable de recevoir les impressions lumineuses diverses correspondant aux différents points de cette image : en raison de l'étroitesse de l'iris pigmentaire, de la forme et de la structure du rhabdome étiré suivant l'axe, il peut y avoir réception d'une tache lumineuse uniforme et sans détail, mais non d'une image.

Ces objections sont sans valeur dans un grand nombre de cas, en particulier dans le cas des yeux composés à ommatidies du type *pseudocône*, tels que ceux de la plupart des Diptères. Dans ces yeux il y a : 1° *formation d'une petite image renversée* dans chaque ommatidie; 2° *utilisation de l'aire centrale de cette image* pour l'impression lumineuse.

1° Dans le type *pseudocône*, en effet, il n'existe pas de cône capable de détruire l'image cornéulaire. Le pseudocône est un simple milieu transparent fonctionnellement comparable à un corps vitré. Comme Exner lui-même l'a constaté, la substance semi-fluide ou liquide de ce pseudocône, dont l'indice de réfraction est bien inférieur à celui de la cornéule, n'a qu'un rôle dioptrique insignifiant, et l'expérience prouve que les petites images renversées restent identiques et se forment à égale distance de la cornéule, quand on les examine derrière une cornée garnie de ses pseudocônes, ou dont les pseudocônes ont été enlevés et remplacés par un liquide de même indice de réfraction que l'hémolymphe de l'animal. Le pseudocône est donc incapable de modifier sensiblement la petite image cornéulaire.

J'ajouterai qu'il paraît en être de même pour un grand nombre d'yeux appartenant au type *eucône* de Grenacher, mais dont les cônes restent mous et semi-fluides.

2° D'autre part, les faits morphologiques que j'ai exposés dans une Note précédente, relative aux terminaisons photoréceptrices des Muscides [1], montrent qu'il existe, dans l'ommatidie de ces Insectes, sept rhabdomères indépendants, présentant à leur extrémité périphérique, qui traverse l'iris pigmentaire, une portion spécialement différenciée en une courte baguette réfringente, située au niveau où précisément se forme l'image projetée par la cornéule. En outre, la substance dans laquelle sont plongées ces baguettes réfringentes, perpendiculaires au plan focal, est en quelque sorte découpée en autant de petits territoires qu'il y a de rhabdomères, par des bandelettes qui cloisonnent la région axiale du plan de l'image. Le faisceau des sept baguettes de rhabdomères a un diamètre d'environ $3^{\mu},5$ à $4^{\mu},5$ dans les genres *Musca, Calliphora, Sarcophaga*, etc. Il se produit donc, dans une *aire centrale* de même dimension, non pas impression diffuse d'une tache lumineuse, mais sélection de rayons qualitativement différents concentrés en sept points voisins de l'image projetée. La présence des courtes bandelettes qui surmontent les interstices séparant l'extrémité des baguettes réfringentes, augmente sans doute la netteté de l'impression, en isolant les baguettes les unes des autres. Les rayons recueillis par chaque baguette sont déviés à l'intérieur de celle-ci, grâce à sa réfringence, et dirigés vers le rhabdomère correspondant qu'ils parcourent suivant sa longueur : il en résulte sept excitations de qualité différente, qui suffisent, étant donné le peu d'étendue de l'aire centrale utilisée, à la réception d'une petite image.

Que deviennent ces excitations? Se combinent-elles dans l'œil composé en une mosaïque correspondant à une image rétinienne totale, unique et droite, comme on l'a admis autrefois? Évidemment non; car ces images partielles sont renversées et, par conséquent, discordantes : *elles ne peuvent se juxtaposer ou se superposer dans l'œil en une image continue.*

La vision par l'œil composé ne saurait être expliquée par la seule étude de cet organe. C'est à tort que tous les auteurs se sont efforcés d'expliquer le mécanisme de la vision chez les Insectes et les Crustacées par l'étude exclusive de l'œil composé, sans tenir aucun compte de la disposition compliquée et tout à fait spéciale du tractus optique. Chez les Insectes, le tractus optique est formé de trois masses ganglionnaires (periopticum, epiopticum,

---

[1] *Comptes rendus*, 16 septembre 1907.

opticum), qui se succèdent au-dessous de l'œil et qui sont reliées entre elles par des fibres entrecroisées. Les théories proposées ne rendent nullement compte des rapports réciproques de ces parties.

En réalité il se fait, chez les Muscides et chez d'autres Insectes : d'abord, au niveau du periopticum, une fusion des excitations semblables recueillies par des rhabdomères différents appartenant à des ommatidies voisines, et, par suite, une réduction du nombre des fibres conductrices ; puis une combinaison des excitations transmises en une image cérébrale totale, grâce à l'intervention des deux chiasmas successifs sur le trajet des voies optiques.

Ce que je tiens à préciser ici, c'est que, chez ces Insectes, chaque ommatidie reçoit, non pas une impression lumineuse diffuse, mais sept impressions distinctes correspondant à sept points voisins situés dans l'aire centrale d'une petite image renversée.

PHYSIOLOGIE. — *Sur l'évolution du carbone, de l'eau et des cendres en fonction de l'âge chez les plantes.* Note de M. **J. Tribot**, présentée par M. Alfred Giard.

Dans une précédente Note [1] nous nous sommes occupé de l'évolution du carbone, de l'eau et des cendres en fonction de l'âge, sur l'Orge; nous donnons aujourd'hui les résultats d'une même étude sur l'Avoine.

En vue de déterminer l'évolution de la quantité qu'Ernest Solvay a désignée par $\frac{E_F}{E_C}$, E_F désignant l'énergie fixée et E_C l'énergie consommée, nous donnons dans le Tableau ci-après les variations de la chaleur de combustion, c'est-à-dire E_F; quant à E_C, qui, comme nous l'avons vu, se réduit à l'énergie calorifique et lumineuse, nous poursuivons l'étude des méthodes capables de le déterminer avec le plus de précision possible.

Nos expériences ont été faites dans les mêmes conditions que celles sur l'Orge et tous nos résultats se rapportent à une moyenne de dix échantillons.

De l'examen du Tableau, il ressort que :

1° On constate pour le poids total de la plante un maximum qui a lieu vers le soixante-quatorzième jour, la courbe du poids ayant la forme indiquée par Quételet pour la variation du poids de l'homme [2].

---

[1] *Comptes rendus,* 2 avril 1907.

[2] Charles Henry et Louis Bastien, *A. F. A. S.,* Grenoble, 1904, p. 797. — Mlle Stefanowska, qui a étudié l'Avoine (*Comptes rendus,* 2 janvier 1905), a obtenu une courbe incomplète, n'ayant pas poussé assez loin les observations.

		Plante.							Terre.		Chaleur de combust.	Chaleur de combust.	
Nos. d'ordre.	Age en jours.	Taille de la tige.	Poids total de la plante.	Poids des tiges sèches.	H^2O sur 100 parties de plante.	Carbone sur 100 part. de tiges sèches.	Hydrogène sur 100 part. de tiges sèches.	Cendres sur 100 parties de tiges sèches.	Carbone sur 100 parties de terre sèche.	Cendres sur 100 part. de terre sèche.	rapportée à 1g de tiges sèches.	rapportée au poids total de tiges sèches.	Taux de minéralisation.
		mm	g										p. 100
180.	18	64,9	1,760	0,199	85,05	42,731	4,123	8,242	2,310	93,505	4,313	0,858	9,69
181.	20	66,3	1,610	0,171	86,40	43,293	4,892	8,474	1,830	95,246	4,710	0,805	9,80
182.	22	99,1	2,210	0,214	87,33	43,261	4,827	10,994	2,185	95,180	3,896	0,832	12,58
183.	25	116,1	2,070	0,186	88,50	?	4,720	14,517	2,541	92,090	3,910	0,727	16,39
184.	27	148,2	2,380	0,200	89,40	37,635	4,275	13,000	2,812	94,244	3,635	0,727	14,54
185.	29	158,0	2,230	0,199	89,05	43,360	4,665	12,500	1,984	94,291	4,532	0,906	14,03
186.	32	180,0	2,65	0,217	90,00	38,906	4,938	13,777	2,012	94,188	3,940	0,854	15,30
187.	34	177,1	2,75	0,246	89,12	42,817	4,878	17,757	2,124	93,207	3,615	0,888	19,92
188.	36	188,2	2,78	0,219	90,28	43,200	3,944	10,842	1,760	94,656	4,208	0,919	12,00
189.	39	196,3	3,29	0,245	93,70	42,631	?	11,235	2,456	89,990	?	?	11,98
190.	41	224,7	3,72	0,262	90,96	40,008	?	14,285	2,740	94,141	3,269	0,854	15,70
191.	43	215,5	3,26	0,276	88,68	42,500	4,523	10,213	2,082	93,230	3,410	0,941	11,51
192.	45	217,2	3,45	0,291	88,02	?	?	?	2,115	93,680	?	?	?
193.	49	228,4	3,61	0,378	86,92	39,708	5,126	13,682	3,070	93,807	2,818	1,062	15,74
194.	55	336,0	5,206	0,490	88,43	21,534	7,886	17,613	1,998	92,755	3,309	1,617	19,91
195.	58	341,0	7,150	0,680	?	29,363	3,222	20,000	3,785	93,245	2,862	1,944	?
196.	64	383,0	6,933	?	?	29,136	5,554	22,661	2,876	94,872	2,963	?	?
197.	74	430,0	7,453	1,003	84,55	32,199	?	18,942	?	?	2,795	2,795	22,40
198.	76	400,0	6,353	0,832	84,98	33,862	5,000	18,750	2,576	93,506	3,046	2,529	22,06
199.	83	350,0	4,713	0,410	81,13	19,375	5,253	19,024	3,983	94,201	3,309	1,356	23,44
200.	87	350,0	?	?	?	14,045	3,813	?	?	?	3,344	?	?
201.	92	330,0	4,181	0,420	73,61	19,333	5,774	17,337	2,816	93,007	3,240	1,360	23,55
202.	96	335,0	3,313	0,368	60,06	14,409	5,819	?	3,931	93,746	3,315	1,218	?

2° Le maximum de poids coïncide avec le maximum de la taille, qui a lieu vers la même époque et avec le maximum de la taille pour l'Orge, d'après la précédente Note.

3° De même que pour l'Orge, on constate, à partir du quarantième jour, une déshydratation lente et des oscillations considérables dans la minéralisation. Dans la dernière colonne du Tableau nous donnons le taux de minéralisation, c'est-à-dire le rapport de la matière minérale totale à l'eau totale, lequel grandit, en somme.

4° Si l'on considère la chaleur de combustion rapportée à 1^g de tige sèche de la plante on constate qu'elle diminue lentement, de $4^{Cal},313$ au dix-huitième jour elle est de $3^{Cal},315$ au quatre-vingt-seizième jour; ceci est à rapprocher du fait que le rapport entre le carbone et les cendres sur 100 parties de tiges sèches diminue à mesure que l'âge de la plante augmente, l'hydrogène suivant la même évolution que le carbone. Au contraire l'énergie fixée sur le poids total des tiges, exprimée par le produit de la chaleur de combustion par le poids de la tige sèche, passe par un maximum qui coïncide avec le maximum du poids et de la taille.

PHYSIOLOGIE. — *Sur la loi psychophysique : applications à l'énergétique et à la photométrie*. Note de M. **Charles Henry**, présentée par M. Alfred Giard.

On trouve, dans la deuxième édition allemande de l'*Optique physiologique* de Helmholtz (p. 405 et suiv.), des recherches de König et Brodhun sur la relation entre i, l'intensité lumineuse, et $\frac{\delta i}{i}$, la variation relative de l'intensité nécessaire pour produire un accroissement d'une unité dans les numéros d'ordre de sensation du blanc et de divers λ.

Il est facile de voir que les expériences de König et Brodhun ne peuvent s'interpoler par la loi de Fechner modifiée

$$S = K \log\left(1 + \frac{i}{\mu}\right),$$

μ étant l'énergie interne initiale. Cette formule conduit pour $\frac{\delta i}{i} = f(i)$ à l'équation

$$\frac{\delta i}{i} = C\left(1 + \frac{\mu}{i}\right),$$

dans laquelle $C = e^{\frac{1}{K}} - 1$ ($e = 2,71828\ldots$). D'après l'expérience, $C = 0,0177$; c'est la

valeur qui correspond à $i = 10000$; C étant déterminé, il faut que les μ obtenus en remplaçant i et $\frac{\partial i}{i}$ par leurs valeurs observées soient constants; or μ varie de 0,35 pour $i = 0,02$ à 66,70 pour $i = 100$, dans le blanc (König). La formule de Fechner n'est donc pas vérifiée. Il est remarquable toutefois que la moyenne des valeurs de C obtenues pour les différents λ par les deux observateurs est très voisine des valeurs trouvées pour le blanc [0,0177 (König); 0,0157 (Brodhun)].

Nous avons donc cherché à tirer des expériences de König et Brodhun une nouvelle formule psychophysique : nous avons dû transformer les courbes $\frac{\partial i}{i} = f(i)$ en courbes $i = \varphi(S)$; cela a été possible, mais laborieux, connaissant les i correspondant aux minima perceptibles ($S = 1$).

Si l'on prend pour ordonnées, au lieu de i, $\log i$ et si l'on transporte l'origine de la courbe $i = \varphi(S)$ aux points $S = 320$, $\log i = 3,6$, on obtient une courbe, symétrique par rapport à sa nouvelle origine, dont l'équation, calculée par M. Louis Bastien, est, pour le blanc, $y = x\frac{810 - 0,007x^2}{102.400 - x^2}$. M. G. Hélitas a calculé :

$$\text{pour } \lambda = 575^{\mu\mu}, \qquad y = x\frac{522,4 - 0,0063x^2}{67.600 - x^2};$$

$$\text{pour } \lambda = 670^{\mu\mu}, \qquad y = x\frac{643 - 0,0124x^2}{82.944 - x^2};$$

$$\text{pour } \lambda = 605^{\mu\mu}, \qquad y = x\frac{469 - 0,00613x^2}{64.516 - x^2}.$$

Pour la deuxième de ces équations la symétrie a lieu autour du point $S = 260$, $\log i = 3,415$; pour la troisième, autour du point $S = 288$, $\log i = 3,7$; pour la quatrième, autour du point $S = 254$, $\log i = 3,53$. Pour les petits λ, ou bien les expériences n'ont pas été poussées jusqu'au minimum de $\frac{\partial i}{i} = \Psi(S)$ ou bien elles ne permettent pas d'en déterminer la valeur avec une exactitude suffisante. Nous compléterons ces données et ces équations, qui ont l'avantage d'une interprétation physiologique facile et suggestive de nouvelles études.

On peut représenter en gros la courbe $i = \varphi(S)$, dans le système d'unités de König et Brodhun, par trois tronçons : le premier de l'origine à $S = 240$, avec l'équation $i = 4,27\,S$; le deuxième, courbe, de $S = 240$ à $S = 550$, raccordant les deux autres; le troisième, de $S = 550$ à $S = 587$, fragment de droite, dont le coefficient angulaire est $1,88 \times 10^4$. Or l'on sait que, pour des S approchés du minimum perceptible, la proportionnalité à l'énergie électrique du courant qui circule dans le nerf conduit à des résultats vérifiés

par l'expérience ([1]) et que, en étudiant les lois d'établissement de la sensation, on retrouve cette proportionnalité pour des numéros d'ordre plus élevés ([2]). Dans les limites des expériences en question, la proportionnalité de l'énergie du courant électrique du nerf à l'énergie excitatrice extérieure est donc vérifiée. D'autre part, sans pouvoir préciser encore la fonction, on peut déduire de divers faits et des lois de la persistance de la sensation que l'énergie de réaction musculaire (réflexe), après avoir grandi dans le même sens que la sensation, passe par un maximum et décroît. Les numéros d'ordre de sensation sont donc liés à l'énergie physiologique d'excitation et de réaction par des relations précises, sinon complètement définies.

Nous pouvons aussi préciser l'élément subjectif qui entache, dans la notion d'*intensité lumineuse,* l'élément objectif. Ce dernier, proportionnel au carré de la vitesse du mouvement vibratoire (distance, ouverture de diaphragme, etc.), est mesuré par l'acuité visuelle, en somme par un repérage de deux traits sur un étalon fixe et concordant pour tous les hommes, l'excitation des mêmes éléments de la *fovea* : l'élément subjectif consiste en ceci que l'on détermine par comparaison à l'étalon non l'intensité i cherchée, mais les intensités i_1 et i_2 entre lesquelles elle est comprise et correspondant à des valeurs d'ailleurs indéterminées $S - 1$ et $S + 1$. En appliquant simplement la formule de Fechner (la formule complète donne des résultats peu différents), on trouve $i = \sqrt{i_1 i_2}$. Dans les photomètres fondés sur les changements de distance, on a $i_1 = K d_1^2$, $i_2 = K d_2^2$; d'où $i = K d_1 d_2$. En prenant pour mesure de i la moyenne $K\left(\frac{d_1 + d_2}{2}\right)^2$, on commet l'erreur $-K\left(\frac{d_1 - d_2}{2}\right)^2$, résultat facile à interpréter.

En raison de cette erreur psychophysique, sensible surtout aux très petites et aux très grandes intensités, et d'autres difficultés graves dans la pratique, il semble logique de prendre pour variables photométriques : d'une part, un élément rigoureusement objectif, l'énergie; d'autre part, un élément subjectif, les aires des S correspondant aux différents λ. Cette méthode permettrait de déterminer les valeurs physiologiques *normales* des sources lumineuses, valeurs énergétiques qui ne sont pas différentes, sui-

---

([1]) *Comptes rendus,* 8 juin 1896; *Société de Biologie,* 18 juillet 1896.

([2]) *Comptes rendus,* 19 octobre 1896.

vant une remarque profonde d'Ernest Solvay, des valeurs économiques normales [1].

M. **René Horand** adresse une Note *Sur le rouge du sapin.*

(Renvoi à l'examen de M. Prillieux.)

M. **Augustin Coret** adresse une Note intitulée : *Illusion d'optique produite par les rayons des voitures marchant à grande vitesse.*

A 3 heures et demie, l'Académie se forme en Comité secret.

La séance est levée à 4 heures.

G. D.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Ouvrages reçus dans la séance du 7 octobre 1907.

Memento du Chimiste (ancien *Agenda du Chimiste*), recueil des tables et documents divers indispensables aux laboratoires officiels et industriels, publié sous la direction de MM. A. Haller, Membre de l'Institut, et Ch. Girard. Paris, H. Dunod et E. Pinat, 1907; 1 vol. in-8°. (Hommage de M. Haller.)

Emanuel Swedenborg opera quædam aut inedita aut obsoleta de rebus naturalibus, nunc edita sub auspiciis Regiæ Academiæ Scientiarum Suecicæ : I. *Geologica et epistolæ*, præfatus est Gustaf Retzius, introductionem adjunxit Alfred-G. Nathorst, edidit Alfred-H. Stroh. Stockholm, 1907, 1 vol. in-4°. (Présenté par M. de Lapparent.)

Congrès préhistorique de France; Session de Périgueux, 1905 : I. *Discours d'inauguration;* II. *Mes fouilles dans la Dordogne de* 1887 *à* 1905*;* III. *Le squelette humain de Moustier;* IV. *La grotte de Liveyre,* par Émile Rivière. Le Mans, 1906; 1 fasc. in-8°. (Présenté par M. de Lapparent.)

---

[1] *Formules d'introduction à l'Energétique,* p. 36.

Trente-sept années de fouilles préhistoriques et archéologiques en France et en Italie, par M. E. Rivière. (Extr. des *Comptes rendus de l'Association française pour l'avancement des Sciences;* Congrès de Lyon, 1906.) Paris, 1907; 1 fasc. in-8°. (Présenté par M. de Lapparent.)

Les Oiseaux observés en Belgique. 2e Partie : *Les Ptilopaides,* suivie de quelques Notes complémentaires sur les Turdinés de la faune belge, par Marcel de Contreras. Bruxelles, F. Vanbuggenhoudt, 1907; 1 vol. in-8°. (Présenté par M. Delage.)

Annales du Bureau central météorologique de France, publiées par M. A. Angot; année 1903 : I. *Mémoires.* Année 1904 : II. *Observations.* Paris, Gauthier-Villars, 1907; 2 vol. in-4°. (Présenté par M. Bouquet de la Grye.)

Bulletin de l'Institut océanographique (Fondation Albert Ier, Prince de Monaco) : n° 102. *Note sur une forme jeune de Trigla,* par le Dr M. Jaquet; n° 103. *Note sur les Brachiopodes recueillis au cours des dernières croisières du Prince de Monaco,* par L. Joubin; n° 104. *Sur quelques formes larvaires énigmatiques d'Eucyphotes, provenant des collections de S. A. S. le Prince de Monaco,* par H. Coutière. Monaco, 1907; 3 fasc. in-8°.

Solar Physics Committee. *Report of the Solar eclipse expedition to Palma, Majorca,* august 30, 1905; prepared under the direction of Sir Norman Lockyer. Londres, 1907; 1 fasc. in-4°.

Universidad nacional de La Plata. Observatorio astronomico. *Comunicaciones elevadas á la Universidad, con motivo del viaje hecho á Europa por el Director* Dr Francisco Posso de Somenzi, décembre 1906. La Plata et Buenos-Aires, 1907; 1 fasc. in-f°.

Efemerides del Sol y de la Luna para 1907. La Plata, 1907; 1 fasc. in-4°.

Katalog öfver K. Vetenskaps-Societetens utställning af Linné-porträtt. Upsal, 1907; 1 fasc. in-12.

Nova acta Regiæ Societatis Scientiarum Upsaliensis; seriei IV, t. I, fasc. 2. Upsal, 1906-1907; 1 vol. in-4°.

Verhandlungen der russisch-kaiserlischen mineralogischen Gesellschaft zu St-Petersburg; 2e série, Bd. XLIV, Lief. 1. Saint-Pétersbourg, 1906; 1 vol. in-8°.

Memoirs of the Department of Agriculture in India; t. I, n° 1, part II. *Studies in Root-parasitism,* by C.-A. Barber : *The haustorium of « Santalum album »*; part 2 : *The structure of the mature haustorium and inter-relations between host and parasite.* Calcutta, 1907; 1 fasc. in-8°.

Ouvrages reçus dans la séance du 14 octobre 1907.

Discours d'ouverture des cours de Zoologie donnés dans le Muséum d'Histoire naturelle (an VIII, an X, an XI et 1806), par J.-B. Lamarck. Avant-Propos par M. A. Giard, et Introduction bibliographique par M. Landrieu. (*Bulletin scientifique de la France et de la Belgique,* t. XL.) Paris, 1907; 1 vol. in-8°. (Hommage de M. Giard.)

Notice sur la Carte hypsométrique du Portugal, par Paul Choffat, avec une Carte tectonique. (Extr. du Tome VII des *Communicaçoes* du Service géologique du Portugal.) Lisbonne, 1907; 1 vol. in-8°. (Présenté par M. de Lapparent.)

Commissâo do Serviço geologico. *Carta hypsometrica de Portugal;* escala $\frac{1}{500000}$, 1906 : folha do Norto, folha do Sul. 2 feuilles in-plano.

Les enfants anormaux, guide pour l'admission des enfants anormaux dans les classes de perfectionnement, par Alfred Binet et Th. Simon, avec une préface de Léon Bourgeois. Paris, Armand Colin, 1907; 1 vol. in-8°. (Présenté par M. Gaston Bonnier.)

Le mouvement du Soleil dans l'espace, par Coste de Lagrave. Paris, Maloine, 1907; 1 fasc. in-12.

Annales de la Société d'émulation du département des Vosges, LXXXIII[e] année, 1[re] et 2[e] Partie, 1907. Paris, Épinal, 1907; 1 fasc. et 1 vol. in-8°.

Recueil des actes du Comité médical des Bouches-du-Rhône; t. XLV, avril 1906-avril 1907. Marseille, 1907; 1 vol. in-8°.

ERRATA.

—

La séance du 7 octobre a été présidée par M. Chauveau.

(Séance du 23 septembre 1907.)

Note de M. *Louis Henry,* Sur les séries de méthylation de l'alcool éthylique, etc. :

Page 549, ligne 14 en remontant, *au lieu de* $(CH^3)^2.CH.CH^2-C^3H^2X$, *lisez* $(CH^3)^2.CH.CH^2-CH^2X$.

Même page, ligne 11 en remontant, *au lieu de* M. de Tessier, *lisez* M. Tissier.